TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

★★★★★★★★★

Mathématiques

★★★★★★★★★

Prof : Abbes Amor – Lycée Pilote Monastir

Section : 4éme Sc-Exp

Révision Bac 2019 : Sujet n° 08

Durée : 3 H 00 mn | **Date : 02/06/2019**

EXERCICE N°1 : 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique 4 cm).

On désigne par θ un nombre réel tel que, $-\pi < \theta < \pi$.

On appelle *A*, *M* et *N* les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$ et $1+e^{i\theta}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre *O* et de rayon 1, et par $\mathcal{C}'$ le cercle de centre *A* et de rayon 1.

1) Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et placer *A*, *M* et *N* dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

2) Montrer que *N* appartient à $\mathcal{C}'$ et donner la nature du quadrilatère *OANM*.

Déterminer un argument de $1+e^{i\theta}$.

3) On pose $u = 1+e^{i\theta}$.

a) Montrer que u est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 2(1+\cos\theta) = 0$.

En déduire la seconde solution de cette équation.

b) Quelles sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$?

4) On considère l'équation $(E) : z^2 - az + a = 0$ où *a* est un nombre réel tel que $0 < a \leq 4$.

On nomme *R* le point d'affixe *a*, et *T* le milieu de [*OR*].

La perpendiculaire à l'axe réel passant par *T* coupe $\mathcal{C}'$ en deux points *U* et *U'*.

Montrer que les affixes de *U* et de *U'* sont les solutions de (E).

EXERCICE N°2 : 4 points

Une urne contient 3 dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6. On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (Les résultats seront donnés sous forme de fractions). On considère les évènements suivants : V : " Le dé est vert ", R : " Le dé est rouge " et S_1 : " On obtient 6 au lancer du dé ".

1) On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.

a) Dresser et complété un arbre de probabilité décrivant la situation.

b) Calculer $p(S_1)$.

c) Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.

2) On tire au hasard un dé de l'urne puis on lance n fois de suite ce dé.

On désigne par S_n l'évènement : " On obtient 6 à chacun des n lancers ".

a) Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n.

b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancés. Montrer que $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.

c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $p_n \geq 0{,}999$.

EXERCICE N°3 : 5 points

Dans l'espace E, rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A(1,0,1)$, $B(-1,2,2)$ et $C(-1,0,1)$. Soient le plan P passant par *A*, *B* et *C* et le plan Q : $2x-2y-z-4=0$.

A/1) a) Vérifier que *ABC* est un triangle rectangle en *C*.

b) Montrer $P : y-2z+2=0$ et Vérifier que $P \perp Q$.

2) Déterminer une représentation paramétrique de l'axe Δ du cercle C circonscrit au triangle ABC.

3) Soit *M* un point quelconque de Δ. Calculer la distance du point *M* au plan Q.

4) Montrer qu'il existe exactement deux sphères S_1 et S_2 passant par les points *A*, *B* et *C* et tangentes au plan Q. Pour chacune des deux sphères, on précisera le rayon et le centre.

B/ Soit l'ensemble S des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-2y-3z+1=0$:

1) Montrer que S est une sphère passant par *A* , *B* et *C*.

2) Montrer que $S \cap Q = \varnothing$.

3) Déterminer les plans K_1 et K_2 parallèles à Q et qui coupent S selon deux cercles de rayon 1.

EXERCICE N°4 : 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)+1 \quad si\ x\in]0,+\infty[\\ f(0)=1 \end{cases}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

d) Justifier que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $f'(x)=x\left(\frac{1}{2}-\ln x\right)$.

e) Dresser le tableau de variations de f .

f) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$ et que $3,27<\alpha<3,28$.

2) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 1 .

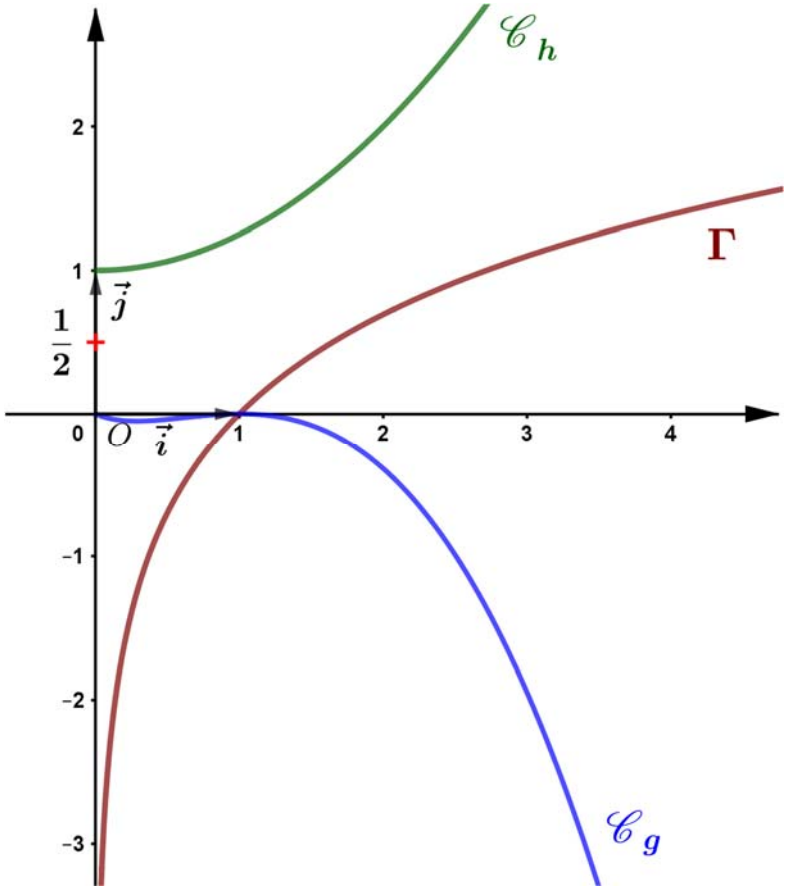
3) Dans la figure ci-dessous , on a représenté la courbe Γ de la fonction ln, et les courbes C_g et C_h représentations graphiques respectivement de la fonction g et h définies sur $[0,+\infty[$ par :

$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x-1$ et $h(x)=\frac{1}{4}x^2+1$.

a) Placer sur la figure les points $A\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\sqrt{e},f\left(\sqrt{e}\right)\right)$.

b) Par une lecture graphique , étudier la position relative de C et T .

c) Vérifier que $g(\alpha)=-\frac{1}{2}\alpha-1$ puis Placer le point $H(\alpha,f(\alpha))$.



4) Tracer T et C dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) On désigne par $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

a) À l'aide d'une intégration par parties , calculer $I=\int_1^{\alpha} x^2 \ln x \, dx$.

b) En déduire $\mathcal{A}(\alpha)$.